L.P. Kairouan	**Devoir de synthèse N°1**	**Prof : Chouihi**
Le : 08 / 12 / 10	**Durée : 3heures**	**Classe : $4M_2$**

Exercice N°1 (3points)

Compléter puis remettre la feuille jointe.

Exercice N°2 (6 points)

On considère la fonction f définie sur $[0,\frac{\pi}{4}]$ par $f(x) = \sqrt{\sin 2x}$ et on désigne par $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j})$.

1) Etudier la dérivabilité de f à droite en 0. Interpréter graphiquement le résultat obtenu.

2) a) Montrer que f est dérivable sur $]0,\frac{\pi}{4}]$ et calculer $f'(x)$.

b) Dresser le tableau de variations de f.

c) En déduire que f réalise une bijection de $[0,\frac{\pi}{4}]$ sur $[0,1]$

3) a) Calculer $f^{-1}(\frac{\sqrt{2}}{2})$ puis $(f^{-1})'(\frac{\sqrt{2}}{2})$.

b) Montrer que f^{-1} est dérivable sur $]0,1[$ et que pour tout $x\in]0,1[$; $(f^{-1})'(x)=\frac{x}{\sqrt{1-x^4}}$

c) Etudier la dérivabilité de f^{-1} à droite en 0.

4) a) Montrer que pour tout entier naturel n non nul, l'équation: $f(x) = \frac{1}{n}$ admet, dans $]0,\frac{\pi}{4}]$, une solution unique a_n. Calculer a_1.

b) Montrer que la suite (a_n) est décroissante et en déduire qu'elle est convergente.

c) Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 0$.

Exercice N°3 (4 points)

Soit ABC un triangle équilatéral de centre O et de sens direct ; A', B', C' les milieux respectifs de [BC], [AC] et [AB].

1) On désigne par $\mathscr{I}$ l'ensemble des isométries f du plan vérifiant: f <{A, B, C}> = {A, B, C}

a) Montrer que f(O) = O.

b) Déterminer alors les éléments de $\mathscr{I}$.

2) On désigne par D le symétrique de B par rapport à (AC).

a) Montrer que ABCD un losange.

b) Caractériser les isométries $\mathbf{t} = S_{(CB)} o S_{(AD)}$ et $r = S_{(AD)} o S_{(CA)}$.

c) Caractériser l'isométrie r'= tor.

3) Soit $g = t_{\overrightarrow{AB}} \ o \ S_{(AC)}$.

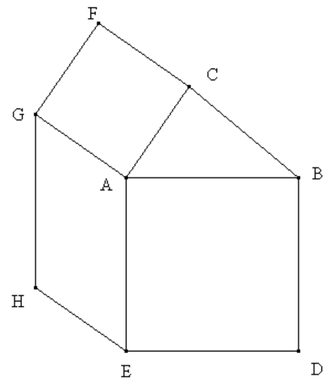
a) Déterminer g(A) et g(B) ; en déduire (gog) (A).

b) Montrer que g est une symétrie glissante.

c) Déterminera les éléments caractéristiques de g.

Exercice N°4 **(3 points)**

Dans le plan orienté est rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$, on considère un triangle ABC de sens direct. On construit à l'extérieur de ce triangle les carrés ABDE et ACFG, ainsi que le parallélogramme AGHE. On désigne par a, b, c, d, e, f, g et h les affixes respectifs des points A, B, C, D, E, F, G et H.



1) a) Montrer que : $g = a + i(c - a)$. En déduire que: $f = c + i(c - a)$.

b) Montrer que : $e = a - i(b - a)$. En déduire que : $h = a + i(c - b)$.

c) Montrer que : $b - f = i(h - c)$.

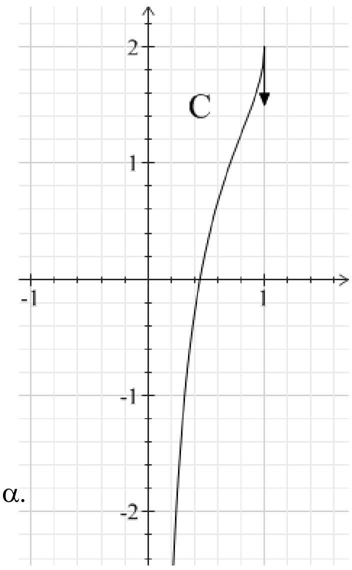
En déduire que : FB = CH et que $(FB) \perp (CH)$.

2) a) Exprimer d en fonction de a et b.

b) Montrer que : DC = BH et que : $(DC) \perp (BH)$

Exercice N°5 **(4 points)**

Dans le graphique ci-contre on a représenté, dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$, la courbe C d'une fonction f définie sur]0, 1], ayant l'axe des ordonnées comme asymptote à droite en 0 et une demi tangente verticale au point de coordonnées (1,2).



1) a) Par lecture graphique, Dresser le tableau de variation de f.

b) En déduire que f réalise une bijection de]0, 1] sur un intervalle J que l'on précisera. On désignera par g la fonction réciproque de f.

c) Reproduire sur votre copie la courbe de f puis représenter, sur la même figure, celle de g. (prendre pour unité graphique 3cm)

2) Sachant que $f(x) = 2 - \frac{\sqrt{1-x^2}}{x}$, montrer que $g(x) = \frac{1}{\sqrt{(x-2)^2+1}}$.

<u>On admettra</u> dans la suite que l'équation g(x) = x admet, dans]0, 1[, une solution unique α.

3) Soit la suite U définie sur IN par: $\begin{cases} U_0 = 1 \\ U_{n+1} = g(U_n) \ , \ n \in IN \end{cases}$

a) Représenter sur le même graphique la suite U, en précisera en particulier les termes U_0, U_1 et U_2 sur l'axe des abscisses.

b) Que peut on conjecturer pour la monotonie et la convergence de la suite U?

c) Montrer par récurrence que pour tout $n \in IN$, $U_n > \alpha$.

d) Montrer que la suite U est décroissante.

e) En déduire que la suite U est convergente puis déterminer sa limite.

Feuille à remettre

Nom et Prénom :……………………………   Classe :………

Compléter par vrai (V) ou faux (F) dans la case en face. (aucune justification n'est demandée)

1) Si Δ est l'axe d'une symétrie glissante f alors pour tout $M \in \Delta$ on a : $f(M) = M$ $\longrightarrow$ ☐

2) Si une isométrie f n'admet aucun point invariant alors f est une symétrie glissante. $\longrightarrow$ ☐

3) Si une isométrie f fixe deux points distincts A et B alors $f = S_{(AB)}$ $\longrightarrow$ ☐

4) Si f est une isométrie qui n'admet aucun point fixe alors fof est une translation $\longrightarrow$ ☐

5) $S_{\Delta'} o S_{\Delta} = S_{\Delta} o S_{\Delta'} \Leftrightarrow \Delta \perp \Delta'$ $\longrightarrow$ ☐

6) Toute rotation $r_{(I,\alpha)}$ se décompose d'une manière unique sous la forme : $r = S_{(Iy)} o S_{(Ix)}$

avec $2(\widehat{\overrightarrow{Ix}, \overrightarrow{Iy}}) \equiv \alpha [2\pi]$ $\longrightarrow$ ☐

7) Si U est une suite vérifiant pour tout $n \in IN$ $\begin{cases} U_n \succ 0 \\ U_{n+1} = U_n + \dfrac{1}{U_n} \end{cases}$ alors U n'est pas majorée. $\longrightarrow$ ☐

8) Soit f une fonction définie sur IR et U une suite définie par la relation $U_{n+1} = f(U_n)$.

a) Si f est décroissante sur IR alors la suite U est décroissante. $\longrightarrow$ ☐

b) Si f est croissante sur IR alors la suite U est monotone. $\longrightarrow$ ☐

9) Toute suite croissante est majorée $\longrightarrow$ ☐

10) L'ensemble des points M d'affixes $z = i + \cos\theta \, e^{\frac{\pi}{4}i}$, $\theta \in [-\pi, \pi]$, est un segment $\longrightarrow$ ☐

11) Si z est un nombre complexe non nul alors les points M(z) et $M'(\frac{1}{\bar{z}})$ sont symétriques par rapport à l'axe des abscisses. $\longrightarrow$ ☐

Exercice N°1

Vrai: 4 ; 7 ; 8-b) ; 10

Faux: Toutes les autres propositions sont fausses.

Exercice N°2

1) Posons $\varphi(x) = \dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}$, $x \succ 0$

$$\varphi(x) = \frac{\sqrt{\sin 2x}}{x} = \frac{\sin 2x}{x} \times \frac{1}{\sqrt{\sin 2x}}$$

Et

comme: $\begin{cases} \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin 2x}{x} = 2 \\ \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{1}{\sqrt{\sin 2x}} = +\infty \end{cases}$ alors $\lim\limits_{x\to 0^+} \varphi(x) = +\infty$

Donc f n'est pas dérivable à droite en 0.

I.G: La courbe $\mathscr{C}$ admet au point O(0,0) une demi-tangente verticale d'équation: $\begin{cases} x = 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$

2) a) La fonction: $x \mapsto \sin 2x$ est dérivable et strictement positive sur]0,π/4] donc f est dérivable sur]0, π/4].

$$f'(x) = \frac{\cos 2x}{\sqrt{\sin 2x}}$$

b)

x	0		π/4
f '(x)	‖	+	0
f(x)	0	↗	1

c) f est strictement croissante sur [0,π/4] donc elle réalise une bijection de [0,π/4] sur f <[0,π/4]> et comme f est continue sur [0,π/4] alors

f <[0,π/4]> = [f(0), f(1)]= [0,1]

3) a) $f^{-1}(\dfrac{\sqrt{2}}{2}) = x \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \\ x \in [0, \dfrac{\pi}{4}] \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin 2x = \dfrac{1}{2} \\ 2x \in [0, \dfrac{\pi}{2}] \end{cases}$

$$\Leftrightarrow 2x = \frac{\pi}{6} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{12} \text{ d'où } f^{-1}(\frac{\sqrt{2}}{2}) = \frac{\pi}{12}$$

$$(f^{-1})'(\frac{\sqrt{2}}{2}) = \frac{1}{f'(f^{-1}(\frac{\sqrt{2}}{2}))} = \frac{1}{f'(\frac{\pi}{12})} = \frac{\sqrt{\sin\frac{\pi}{6}}}{\cos\frac{\pi}{6}}$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{6}}{3}$$

b) $\begin{cases} f \text{ est dérivable sur }]0, \pi/4[\\ \text{pour tout } x \in]0, \pi/4[, f'(x) \neq 0 \\ f \prec]0, \pi/4[\succ =]0,1[\end{cases}$

Alors f^{-1} est dérivable sur]0,1[

$$(f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$$

$$= \frac{1}{f'(y)} \text{ avec } \begin{cases} y = f^{-1}(x) \\ x = f(y) = \sqrt{\sin 2y} \\ \sin 2y = x^2 \end{cases}$$

$$= \frac{\sqrt{\sin 2y}}{\cos 2y}$$

$$= \frac{\sqrt{\sin 2y}}{\sqrt{1-\sin^2 2y}} = \frac{x}{\sqrt{1-x^4}}$$

c) $\lim\limits_{y\to 0^+} \dfrac{f^{-1}(y) - f^{-1}(0)}{y-0} = \lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{1}{\dfrac{f(x)-f(0)}{x-0}} = 0$

car $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{f(x)-f(0)}{x-0} = +\infty$

Donc f^{-1} est dérivable à droite en 0 et $(f^{-1})'(0) = 0$

4) a) Pour tout n∈IN*, (1/n) ∈]0,1] et comme f réalise une bijection de]0,π/4] sur]0, 1] alors il existe a_n ∈]0,π/4], unique tel que $f(a_n) = 1/n$.

f(x) = 1⇔ x = π/4 donc $a_1 = \pi/4$.

b) Pour tout n∈IN* , $\dfrac{1}{n} \succ \dfrac{1}{n+1}$ ⇔ $f(a_n) > f(a_{n+1})$

⇔ $a_n > a_{n+1}$ (car f est strictement croissante)

D'où (a_n) est décroissante.

$\begin{cases} (a_n) \text{ est décroissante} \\ (a_n) \text{ est minorée par } 0 \end{cases}$ alors (a_n) est convergente

c) $a_n = f^{-1}(1/n)$.

$$\begin{cases}\lim\limits_{n\to+\infty}\dfrac{1}{n}=0\\ f^{-1}\text{ est continue en }0\end{cases}\quad \text{alors } \lim\limits_{n\to+\infty} f^{-1}(\frac{1}{n})=f^{-1}(0)=0$$

$$\text{D'où } \lim\limits_{n\to+\infty} a_n=0$$

Exercice N°3

1) a) O est le centre de gravité de ABC donc f(O) est le centre de gravité de f<ABC> (puisque l'isométrie conserve le barycentre) or f < ABC > = ABC donc f(O) = O.

b) $\begin{cases}f \text{ est une isométrie}\\ f(O)=O\end{cases}$ donc f est soit une rotation de centre O soit une symétrie axiale d'axe passant par O, f peut être alors déterminée par la donnée de f(A).

f(A)	Rotation	Symétrie axiale
A	id_P	$S_{(OA)}$
B	$R_{(O,\widehat{(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OB})})}=R_{(O,\frac{2\pi}{3})}$	$S_{med[AB]}=S_{(OC)}$
C	$R_{(O,\widehat{(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OC})})}=R_{(O,\frac{-2\pi}{3})}$	$S_{med[AC]}=S_{(OB)}$

D'où $\mathscr{I}=\{id_P, R_{(O,\frac{2\pi}{3})}, R_{(O,\frac{-2\pi}{3})}, S_{(OA)}, S_{(OB)}, S_{(OC)}\}$

2) a) * $\begin{cases}D=S_{(AC)}(B)\text{ donc } AB=AD \text{ et } CB=CD\\ ABC \text{ est équilatéral donc } AB=AC=BC\end{cases}$

Alors AB = BC = CD = CA et par suite ABCD est un losange.

b) On a:

$\begin{cases}(BC)//(AD)\\ A'\text{ est le projeté orthogonal de A sur (BC)}\end{cases}$ donc t est la translation de vecteur $2\overrightarrow{AA'}$

* D = $S_{(AC)}$(B) donc

On a: $\begin{cases}(AC)\cap(AD)=\{A\}\\ 2(\widehat{\overrightarrow{AC},\overrightarrow{AD}})\equiv\dfrac{2\pi}{3}[2\pi]\end{cases}$ donc r est la rotation de centre A et d'angle $\dfrac{2\pi}{3}$.

c) r' = tor = $S_{(CB)}oS_{(AD)}oS_{(AD)}oS_{(CA)}=S_{(CB)}oS_{(CA)}$

D'autre part: $\begin{cases}(CB)\cap(CA)=\{C\}\\ 2(\widehat{\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CB}})\equiv\dfrac{2\pi}{3}[2\pi]\end{cases}$ donc r' est la rotation de centre C et d'angle $\dfrac{2\pi}{3}$.

3) a) g(A) = $t_{\overrightarrow{AB}}$(A) = B

g(B) = $t_{\overrightarrow{AB}}$(D) = C

gog(A) = C.

b) g est la composée d'une translation et d'une symétrie orthogonale donc c'est une symétrie orthogonale ou une symétrie glissante.

<u>Supposons que g est une symétrie orthogonale</u>

g est une symétrie orthogonale alors gog = id_P donc gog(A) =A ce qui est contradictoire au résultat établi en a) (gog (A) = C ≠ A) donc g n'est pas une symétrie orthogonale et par suite g est une symétrie glissante.

c) Désignons par Δ l'axe de g et $\vec{u}$ son vecteur.

g(A) = B ⇒ A*B∈Δ ⇒ C'∈Δ

g(B) = C ⇒ B*C∈Δ ⇒ A'∈Δ

d'où **<u>Δ = (A'C')</u>**.

C'∈Δ ⇒ $t_{\vec{u}}$(C') = g(C') = g(A*B)

= g(A)*g(B) = B*C = A'

d'où $\boxed{\mathbf{\vec{u}=\overrightarrow{C'A'}}}$

Exercice N°4

1) a)

* ACFG est un carré de sens direct donc

G = $r_{(A,\pi/2)}$(C) ⇔g – a = i(c – a) ⇔ **<u>g = a + i(c – a)</u>**

* $\overrightarrow{CF}=\overrightarrow{AG}$ ⇔ f – c = g – a ⇔ **<u>f = c + i(c – a)</u>**

b)

* ABDE est un carré de sens indirect donc

E = $r_{(A,-\pi/2)}$(B) ⇔e – a = -i(b – a) ⇔ **<u>e = a – i(b – a)</u>**

* AGHE est un parallélogramme ⇔

$\overrightarrow{AH}=\overrightarrow{AE}+\overrightarrow{AG}$ ⇔ h – a = (e – a) + (g – a)

⇔ h – a = -i(b – a) + i(c – a)

⇔ **<u>h = a + i(c – b)</u>**

c)

*b – f = b – c – i(c – a) = i[a – c + i(c – b)]=i(h– c)

* b – f = i(h – c)

$$\Leftrightarrow \frac{b-f}{h-c}=i \Leftrightarrow \begin{cases}\left|\dfrac{b-f}{h-c}\right|=1\\ \arg(\dfrac{b-f}{h-c})\equiv\dfrac{\pi}{2}[2\pi]\end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases}FB=CH\\ (FB)\perp(CH)\end{cases}$$

2) a) $\overrightarrow{ED}=\overrightarrow{AB}$ ⇔ d – e = b – a

⇔ d = a – i(b – a) + (b – a)

⇔ **<u>d = b – i(b – a)</u>**

b) $c - d = c - b + i(b - a)$
$= -i[a - b + i(c - b)] = -i(h - b)$

$$\Leftrightarrow \frac{c-d}{h-b} = -i \Leftrightarrow \begin{cases} \left|\frac{c-d}{h-b}\right| = 1 \\ \arg\left(\frac{c-d}{h-b}\right) \equiv \frac{-\pi}{2}[2\pi] \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} DC = BH \\ (DC) \perp (BH) \end{cases}$$

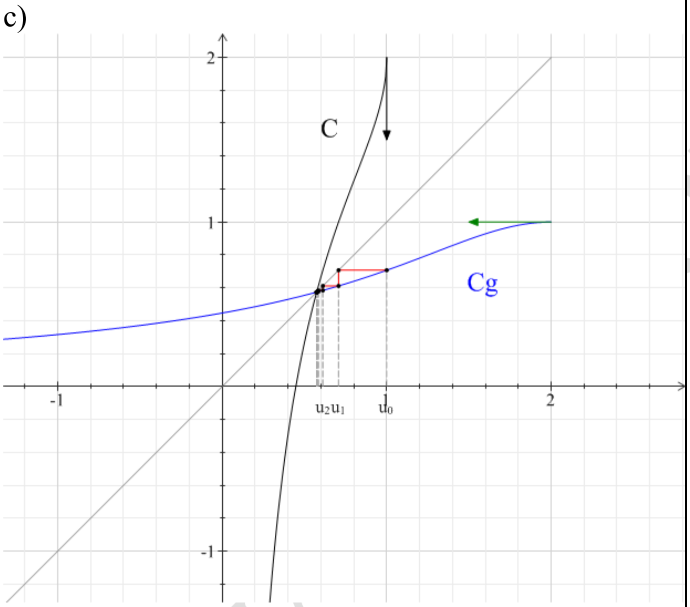
Exercice N°5

1) a)

x	0	1
f '(x)	+	
f(x)	-∞ ↗	2

b) f est strictement croissante sur]0,1] donc elle réalise une bijection de]0,1] sur f <]0,1]> et comme f est continue sur]0,1] alors
$f<]0,1]> =]\lim_{0^+} f, f(1)\,)] =]-\infty,2]$

c)



2) $\begin{cases} g(x) = y \\ x \in]-\infty, 2] \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f(y) = x \\ y \in]0,1] \end{cases}$

$$f(y) = x \Leftrightarrow 2 - \frac{\sqrt{1-y^2}}{y} = x \Leftrightarrow \sqrt{1-y^2} = (2-x)y$$
$$\Leftrightarrow 1 - y^2 = (2-x)^2y^2 \quad \text{avec} \quad (2-x)y \geq 0$$
$$\Leftrightarrow [1 + (2-x)^2]y^2 = 1 \quad \text{avec} \quad (2-x)y \geq 0$$
$$\Leftrightarrow y = \frac{1}{\sqrt{(x-2)^2+1}}$$

D'où $g(x) = \dfrac{1}{\sqrt{(x-2)^2+1}}$

3) a) Voir au dessus.

b) Conjecture: U est décroissante et convergente.

c) Démontrons par récurrence la propriété
P_n:" $\forall n \in IN$, $U_n > \alpha$"

Pour n = 0 $\quad U_0 = 1 > \alpha$ (par hypothèse)
donc P_0 est vraie.

Supposons que $U_n > \alpha$ et montrons que $U_{n+1} > \alpha$.
$U_n > \alpha \Rightarrow g(U_n) > g(\alpha)$ car g est croissante.
$\Rightarrow U_{n+1} > \alpha$ car $g(\alpha) = \alpha$

Conclusion: $\forall n \in IN$, $U_n > \alpha$.

d) Démontrons par récurrence la propriété
P_n:" $\forall n \in IN$, $U_{n+1} \leq U_n$"

Pour n = 0 $\quad U_1 = g(1) = \dfrac{\sqrt{2}}{2} \leq 1 = U_0$
donc P_0 est vraie.

Supposons que $U_{n+1} \leq U_n$ et montrons que $U_{n+2} \leq U_{n+1}$
$U_{n+1} \leq U_n \Rightarrow g(U_{n+1}) \leq g(U_n)$ car g est croissante.
$\Rightarrow U_{n+2} \leq U_{n+1}$

Conclusion: $\forall n \in IN$, $U_{n+1} \leq U_n$
D'où U est décroissante.

c) $\begin{cases} U \text{ est décroissante} \\ U \text{ est minorée par } \alpha \end{cases}$ alors U est convergente.

Posons $l = \lim U$

$\begin{cases} U_{n+1} = g(U_n) \\ g \text{ est continue sur }]\alpha, 1] \end{cases}$

alors l est solution de l'équation $\begin{cases} g(l) = l \\ l \in [\alpha, 1] \end{cases} \Rightarrow \underline{\mathbf{l = \alpha}}$